80 Jahre expandierendes Weltall

1. Teil

von David Walker

Veröffentlicht in Polaris Nr. 79 (2/2010)

1 Verschlungene Wege

Natürlich expandiert das Weltall nicht erst seit 80 Jahren. Aber so lange ist es her, daß sich diese Erkenntnis unter den Astronomen und Physikern durchsetzte. Einstein übrigens, der mit seiner Allgemeinen Relativitätstheorie die Grundlage der modernen Kosmologie erst geschaffen hat, mochte lange Zeit nicht daran glauben. Er war davon überzeugt, das Universum sei *statisch*, und die ersten Arbeiten, Anfang der 20er Jahre, die Hinweise auf eine Expansion offenbarten, wischte er vom Tisch, so daß diese unter den Fachleuten gar nicht erst bekannt wurden.

Entgegen der weit verbreiteten Auffassung, war Hubble *nicht* derjenige, der zuerst die Expansion des Weltalls erkannte. Es war vielmehr ein belgischer Priester. Über ihn wird noch zu berichten sein, allerdings nicht mehr in diesem Teil. Georges Lemaître war sein Name, und „hauptberuflich" war er Physiker. Vor ihm hätte ein Deutscher, Carl Wirtz in Kiel, zu dieser Erkenntnis kommen *können*. Er hatte die Wahrheit *gesehen*,—seine Beobachtungen aber genau in die verkehrte Richtung interpretiert.

1922, also noch früher, war in der *Zeitschrift für Physik* eine Arbeit des Russen Alexander Friedmann erschienen, in der er die Erkenntnis publizierte, das Universum *könnte* sowohl expandieren als auch kontrahieren. Einstein lehnte diese Arbeit rundweg ab und tat folglich nichts, um sie in der Fachwelt bekannt zu machen [1]. So wußten Wirtz und Lemaître, als sie ihre oben erwähnten Arbeiten durchführten, nichts von Friedmanns theoretischen Ergebnissen.

Bevor wir diese verschlungenen Wege weiter verfolgen, wollen wir uns erst einmal auf den heutigen Standpunkt stellen und erläutern, was man sich unter einem expandierenden Weltall eigentlich vorzustellen hat.

2 Der Urknall: wie er nicht war

Man begeht einen Fehler, stellt man sich den Urknall wie die Explosion einer Bombe (für Pazifisten: eines Silvesterkrachers) vor. Eine Bombe explodiert *an einem bestimmten Punkt*, und die Fragmente fliegen in alle Richtungen von diesem Punkt

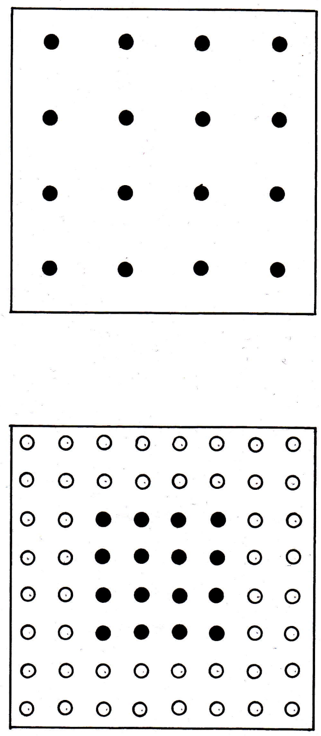

Abbildung 1: Die Expansion des Weltalls. Gezeigt ist ein beliebiger Ausschnitt des Alls, die Kreise bedeuten die darin enthaltenen Galaxien. Die obere Zeichnung zeigt die heutige Galaxiendichte, die untere diejenige vor ca. 8 Mrd. Jahren, als alle Galaxien nur halb so weit voneinander entfernt waren wie heute.

(er ist der Schwerpunkt der [jetzt ehemaligen] Bombe) fort. Das Weltall besitzt keinen solchen Schwerpunkt. Nach heutiger Erkenntnis *ist* es unendlich groß und *war* auch immer unendlich groß—*selbst zum Zeitpunkt des Urknalles*. Der Urknall fand nicht an einem Punkt irgendwo im Weltall statt, sondern spielte sich *in dem gesamten All* ab.—Wie soll man sich das vorstellen? Schauen wir uns dazu zunächst an, in welcher Weise das Weltall expandiert.

3 Die Expansion des Weltalls

Wie kann ein Raum, der bereits unendlich groß ist, *expandieren*, also noch größer werden? „Expansion“ kann hier nur so verstanden werden, daß die *Dichte* der Galaxien weltweit immer kleiner wird.—Wir können uns das vielleicht so veranschaulichen, wie ich es in der Abb. 1 dargestellt habe. Die einzelnen Kreise sollen Galaxien sein, von denen ich vereinfachend annehme, sie seien alle hübsch regelmäßig angeordnet. Ihr—heutiger—mittlerer Abstand beträgt vielleicht 300 000 Parsec, um eine Größenordnung zu nennen. Diese Angabe bezieht sich auf die obere der beiden Abbildungen, die den heutigen Zustand darstellt. Vor etwa 8 Milliarden Jahren waren *alle* Abstände im Weltall nur halb so groß wie heute, unsere Galaxien waren wesentlich näher beieinander—so, wie es in der unteren Abbildung dargestellt ist. Der dargestellte Ausschnitt aus dem All (von dem wir annehmen, er expandiere nicht mit) enthielt damals mehr Galaxien: die Galaxien*dichte* war höher, als sie es heute ist.

Als Folge der Expansion sind von damals bis heute all die unten als offene Kreise gezeichneten Galaxien im oberen Bild *aus dem abgebildeten Ausschnitt herausgefallen*, nur die unten als gefüllte Kreise dargestellten findet man oben wieder. Alle Galaxien sind trotzdem noch da, aber sie füllen jetzt ein größeres Volumen aus, weil der Raum *zwischen* ihnen sich erweitert hat—weltweit.

In meiner Darstellung scheinen die Galaxien von dem Mittelpunkt des gezeigten Ausschnittes wegzudriften. Aber das täuscht, denn dieser Ausschnitt kann sich *irgendwo* im Weltall befinden, an jeder beliebigen Stelle. Stets bietet sich das gleiche Bild: jede Galaxie driftet von jeder fort.

Es gibt nur eine Ausnahme. Das sind solche Galaxien oder Himmelskörper, die durch die Gravitation oder andere Kräfte *fest aneinander gebunden sind*. Gebundene Strukturen expandieren nicht mit. Die Galaxien ihrerseits werden also nicht größer, da sie durch die Schwerkraft der Sterne, aus denen sie bestehen, von innen heraus zusammengehalten werden. Galaxienhaufen werden ebenfalls nicht größer, weil sich die Galaxien, aus denen sie bestehen, gegenseitig anziehen. Sie folgen jeweils als ganzes der kosmischen Expansion. Nur solche Galaxien oder -haufen expandieren mit dem Raum mit, die zu weit von jedem Nachbarn entfernt sind, um an dessen „Schwerkraftkandarre“ zu hängen.

4 Der Urknall als globales Ereignis

Lassen wir jetzt in Gedanken die Expansion des Weltalls *rückwärts* laufen. Dann werden in den Ausschnitt der Abb. 1 immer mehr Galaxien hineinkommen, da diese ja immer enger zusammenrücken. Das All ist unendlich groß und enthält unendlich viele Galaxien,—die Galaxien rücken also nicht nur in dem gezeigten Ausschnitt, sondern *überall im All* näher zusammen: die Dichte der Materie wird immer größer, an jeder beliebigen Stelle, im gesamten Universum. Gehen wir in Gedanken immer weiter in der Zeit zurück, dann erreichen wir Epochen, in denen es noch keine Galaxien, keine Sterne gab, sondern nur Elementarteilchen und Licht. Diese sind es nun, die immer näher zusammenrücken, wobei Dichte, Druck und Temperatur immer weiter ansteigen. Das gesamte unendliche Weltall wird—überall—zu einem äußerst heißen Gas, in dem äußerst hohe Werte von Druck und Dichte herrschen. Was ergibt sich schließlich?—

Schließlich nehmen die Temperatur, die Dichte und der Druck *überall im Weltall unendlich große Werte* an. Diesen Zustand nennt man den „Urknall“. Er herrschte damals in dem ganzen unendlichen Weltall. Der Urknall fand, mit anderen Worten, *überall* statt.

Dank der Teilchenbeschleuniger wie DESY oder CERN ist die Physik der Elementarteilchen, die das Weltall kurz nach dem Urknall ausfüllten, bis hinauf zu der Temperatur, die ca. eine Millionstel Sekunde nach dem Urknall herrschte ($\approx 10^{13}$ K), gut verstanden (siehe z. B. [2]). Bis zu dieser Zeit läßt sich also die Entwicklung des Weltalls auf recht sicherem Boden zurückverfolgen. Mit dem neuen Beschleuniger in Genf, dem LHC (Large Hadron Collider), möchte man zu noch höheren Temperaturen vordringen und damit zu physikalischen Erkenntnissen über Zeiten gelangen, die noch näher am Urknall lagen.

Der Urknall selbst jedoch entzieht sich der physikalischen Beschreibung. Druck, Temperatur und Dichte waren unendlich groß; der Längenbegriff war sinnlos, denn alle Abstände zwischen irgend zwei Punkten waren Null, während der Raum selbst aber unendlich groß war. Ein solcher Zustand ist unphysikalisch. Trotzdem herrschte er vor 13.7 Milliarden Jahren vor. „Unphysikalisch" heißt hier, daß man mit den bisher bekannten Naturgesetzen nicht weiterkommt.*

5 Das kosmologische Prinzip

Fassen wir zusammen: es gibt keine ausgezeichneten Punkte im Weltall. Jede Galaxie driftet von jeder fort (wenn sie nicht über die Gravitation gebunden ist), weil der Raum zwischen den Galaxien sich weitet. Das ist ganz unabhängig davon, an welcher Stelle des Alls diese Galaxie sein mag. Auch der Urknall war ein Ereignis, das in dem gesamten Universum, überall zugleich, stattfand. Das eben Gesagte ist der Inhalt des kosmologischen Prinzips:—

- Jedem fiktiven Beobachter bietet das Universum das gleiche Bild, wo immer er sich auch befinden mag.

  (Kosmologisches Prinzip)

(Natürlich sieht er nicht von überall aus dieselben Galaxien, aber der Aufbau des Universums ist überall identisch.) In diesem Sinne kann sich ein fiktiver Beobachter an jeder beliebigen Stelle eine „Handvoll" von Galaxien herausgreifen und wird feststellen, daß jede von jeder fortstrebt.

6 Fluchtgeschwindigkeit und Entfernung

Das kosmologische Prinzip macht eine bemerkenswerte Aussage, was die Fluchtgeschwindigkeiten der Galaxien angeht: diese müssen um so größer sein, je weiter

**Bei erneuter Durchsicht (Apr. 2013) eingefügte Note:* Bei einem geschlossenen Weltall wäre der Raum selbst allerdings von *endlicher* Größe, jedoch hätte auch dieser keinen Mittelpunkt, an dem der Urknall stattgefunden haben könnte. Siehe hierzu der neu eingefügte Anhang.

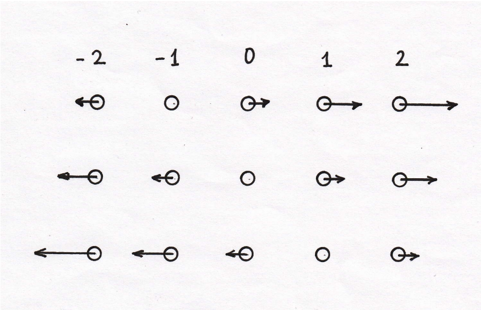

Abbildung 2: Dreimal dieselben Galaxien. Ein fiktiver Beobachter findet immer, daß die Fluchtgeschwindigkeit proportional mit der Entfernung zunimmt, gleich, ob er sich in der Galaxie −1, 0 oder 1 befindet (1., 2., 3. Zeile).

die betreffende Galaxie von uns entfernt ist. Denn nur dann bietet sich jedem fiktiven Beobachter das gleiche Bild des Weltalls. Diese Gesetzmäßigkeit wird heute als das *Hubblesche Gesetz* bezeichnet. Wir wollen uns das anhand der Abb. 2 verdeutlichen.

Die drei Zeilen sollen jeweils dieselben Galaxien zeigen. Zur Vereinfachung habe ich sie in gleichen Abständen wie Perlen auf eine Kette gereiht. Die Zahlen über der ersten Zeile: −2, −1, 0, 1, 2, numerieren die Galaxien. Wir beginnen in der ersten Zeile, indem wir einen fiktiven Beobacher in die Galaxie Nr. −1 setzen. Er sieht den einen Nachbarn, die Galaxie Nr. 0, mit der Geschwindigkeit v davonfliegen, was durch den Pfeil dargestellt ist. Der andere Nachbar, Galaxie Nr. −2, entfernt sich, da gleich weit entfernt, mit der gleichen Geschwindigkeit v von ihm, aber in die andere Richtung.—Was sieht ein fiktiver Beobachter, der sich in der Galaxie Nr. 0 befindet? Dazu schauen wir uns die zweite Zeile dieser Abbildung an.

Ein Beobachter in der Galaxie Nr. 0 sieht *seine* beiden Nachbarn, das sind die Galaxien −1 und 1, mit den gleichen Geschwindigkeiten zurückweichen, die der Beobachter in der Galaxie Nr. −1 für dessen beiden Nachbarn festgestellt hat, nämlich v. Denn das kosmologische Prinzip fordert, daß jeder Beobachter das gleiche sieht. Die Galaxie Nr. −2 entfernt sich von dem Beobachter in der Galaxie 0 aber mit der doppelten Geschwindigkeit $2v$ (doppelte Pfeillänge!), da sie sich *in bezug auf die Galaxie Nr.* −1 bereits mit der Geschwindigkeit v bewegt und Galaxie −1 selbst, von Nr. 0 aus gesehen, die Fluchtgeschwindigkeit v besitzt.

Und so geht es weiter. Ein fiktiver Beobachter in der Galaxie Nr. 1 (dritte Zeile der Abb. 2) sieht wiederum *seine* nächsten Nachbarn jeweils mit der Geschwindigkeit v sich entfernen und findet für die Galaxien Nr. −1 und −2 jeweils die Geschwindigkeiten $2v$ und $3v$. Das Kosmologische Prinzip fordert also:—

- Die Fluchtgeschwindigkeit v nimmt proportional mit der Entfernung D zu:

$$v = H_0 \cdot D \quad .$$

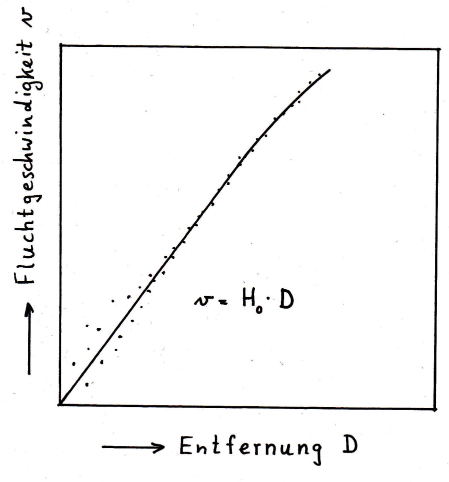

Abbildung 3: „HUBBLE-Diagramm“: Fluchtgeschwindigkeit v über Entfernung D für Galaxien. Außer für extrem weit entfernte Galaxien, erwartet man eine Gerade, wie die eingezeichnete. In sehr großen Entfernungen erfolgt ein Abflachen, da die Ausdehnungsrate des Alls damals einen größeren Wert hatte als heute. Die Punkte sind fiktive Meßergebnisse. In kleinen Entfernungen streuen sie stark um die Gerade, da die Fluchtgeschwindigkeiten naher Galaxien noch so klein sind, daß sie von deren Eigenbewegungen überlagert werden.

H_0 ist der heutige Wert der HUBBLE-Konstanten. Sie ist die Konstante der Proportionalität zwischen der Fluchtgeschwindigkeit und der Entfernung. Sie ist übrigens gar nicht konstant, sondern wird mit der Zeit kleiner.

Um diese theoretischen Überlegungen anhand von Beobachtungen prüfen zu können, muß man zweierlei messen: (1) die Fluchtgeschwindigkeiten und (2) die Entfernungen weit entfernter Galaxien. Trägt man diese in ein Diagramm ein, erwartet man das in der Abb. 3 dargestelle Verhalten. Die Punkte sollen die Ergebnisse dieser Messungen darstellen. Die Resultate für Galaxien mittlerer Entfernung liegen auf der eingezeichneten Geraden,—wie es sein muß, wenn Fluchtgeschwindigkeit und Entfernung miteinander proportional sind. Die Steigung dieser Geraden ist der *heutige* Wert der HUBBLE-Konstanten: $H_0 = 72\,\frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}}$ [2].

Alle Galaxien zeigen nun aber eine *Eigenbewegung*, welche der Fluchtbewegung überlagert ist. Der Andromedanebel z. B. entfernt sich noch nicht einmal von uns, sondern kommt näher, weil seine Eigenbewegung die Fluchtbewegung übersteigt. Wir wissen jedoch aus dem oben Gesagten, daß die Fluchtgeschwindigkeit einer Galaxie mit deren Entfernung größer wird und schließlich die Eigengeschwindigkeit weit übersteigt,—aber eben erst ab einer bestimmten Entfernung. So wird bei *nahen* Galaxien die Fluchtbewegung durch die Eigenbewegung verwischt, weswegen die in Abb. 3 gezeigten fiktiven Meßpunkte im Falle naher Galaxien nicht auf der gezeichneten Geraden liegen, sondern um sie herum streuen.

Bei sehr weit entfernten Galaxien, schließlich, schaut man in Zeiten zurück, zu denen die HUBBLE-Konstante einen größeren Wert hatte als heute, denn jede Beobachtung ist ja ein Blick in die Vergangenheit. Die HUBBLE-Konstante wird mit der Zeit kleiner, weil sich die Expansionsgeschwindigkeit des Weltalls ändert. Bei großen Entfernungen flacht die Gerade in der Abb. 3 folglich ab, woraus man die *Beschleunigung* der kosmischen Expansion bestimmen kann (was auch geschehen ist).

Die hier erwähnten Messungen wurden zum ersten Mal von WIRTZ, LEMAÎTRE und schließlich HUBBLE durchgeführt. Darüber berichte ich im nächsten Teil. Dort werden dann die „verschlungenen Wege“, die im ersten Abschnitt erwähnt sind, weiter verfolgt. In diesem Teil habe ich dargestellt, was man *zu erwarten hat*, wenn man in einem expandierenden Weltall lebt, in dem alle Orte gleichwertig sind.

Literatur

[1] H. Nussbaumer: SuW 6/2007, S. 37 ff.

[2] P. Schneider: *Extragalaktische Astronomie und Kosmologie*, Springer, 2006.

A Geschlossenes Universum

Eingefügt im April 2013

A.1 Das Volumen des Universums

Bei einem geschlossenen Universum ist das Volumen zu allen Zeiten endlich, der Raum allerdings ist nach wie vor unbegrenzt, ähnlich einer Kugeloberfläche, nur in drei Dimensionen.

Das Volumen $\mathscr{V}$ eines geschlossenen Universums berechnet sich gemäß

$$\mathscr{V} = \iiint \sqrt{|{}^3g|}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \ , \tag{1}$$

dabei bedeutet ${}^3g$ die Determinante des räumlichen Teiles des metrischen Tensors der ROBERTSON-WALKER-Metrik. Wir verwenden sie in dieser Form:

$$c^2\, d\tau^2 = c^2\, dt^2 - R^2(t) \left\{ d\chi^2 + f^2(\chi) \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \right) \right\} \ . \tag{2}$$

$c\, d\tau$ ist das Linienelement der vierdimensionalen Raumzeit, $R(t)$ der kosmische Skalenfaktor, und die Funktion $f(\chi)$ lautet:

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \rightarrow \quad \text{positive Krümmung (geschlossenes Universum)} \\ \chi & \rightarrow \quad \text{euklidisches Universum (offen)} \\ \operatorname{sh}\chi & \rightarrow \quad \text{negative Krümmung (offenes Universum)} \end{cases} \ .$$

Für ein geschlossenes Universum ist $\chi \in [0, \pi[$, in den beiden anderen Fällen läuft χ von 0 bis ∞.

In der ROBERTSON-WALKER-Metrik treten keine gemischten Ausdrücke auf, *insbesondere* keine der Form $dt\, d\chi$, $dt\, d\vartheta$ und $dt\, d\varphi$: der zeitliche und der räumliche Teil des zugehörigen metrischen Tensors

$$(g_{\mu\nu}) = \operatorname{diag}\Big(1,\ -R^2(t),\ -R^2(t)f^2(\chi),\ -R^2(t)f^2(\chi)\sin^2\vartheta\Big)$$

sind getrennt. Die Zeit geht nur über die skalare Funktion $R(t)$, den „Skalenfaktor", in den räumlichen Teil

$$({}^3g_{ij}) = R^2(t)\cdot\operatorname{diag}\Big(1,\ f^2(\chi),\ f^2(\chi)\sin^2\vartheta\Big) \tag{3}$$

des metrischen Tensors ein. Das Minuszeichen, das wegen der Raum-Zeit-Signatur hereinkommt, haben wir in den Komponenten ${}^3g_{ij}$ fortgelassen.

- Der dreidimensionale Raum ist als ein *Unterraum* in die vierdimensionale Raumzeit eingebettet und besitzt, für sich genommen, die in der Gleichung (3) angeschriebene Metrik.
- Im Teil A.2 wird gezeigt, daß die Metrik der Gleichung (3) derjenigen einer dreidimensionalen Kugel im vierdimensionalen Raum (n i c h t Raumzeit!!) entspricht.
- Der dreidimensionale Raum ist also homogen und isotrop. Insbesondere ist die Krümmung überall die gleiche. So etwas heißt in der Differentialgeometrie ein „*Unterraum konstanter Krümmung*" oder ein „*maximal symmetrischer*" Unterraum.

Jetzt aber zur Volumenberechnung eines geschlossenen Universums.—Die räumlichen Integrationsvariablen in der Gleichung (1) sind $x^1 = \chi$, $x^2 = \vartheta$ und $x^3 = \varphi$, und aus der Gleichung (3) ergibt sich für die Determinante von ${}^3g_{ij}$:

$${}^3g = R^6(t)\, f^4(\chi)\, \sin^2\vartheta = R^6(t)\, \sin^4\chi\, \sin^2\vartheta\ ,$$

mit $f(\chi) = \sin\chi$ für ein geschlossenes Universum. In Gleichung (1) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} R^3(t)\, \sin^2\chi\, \sin\vartheta\, d\chi \\
&= 2\pi\cdot R^3(t)\cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta}_{2} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2\chi\, d\chi}_{\pi/2} \\
&= 2\pi^2 R^3(t) \quad .
\end{aligned}$$

Ein geschlossenes Universum besitzt also zu jeder Zeit ein endliches Volumen: $\mathscr{V} = 2\pi^2 R^3(t)$.

Die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors $R(t)$ ergibt sich aus der Lösung der FRIEDMANN-Gleichungen. Ist die kosmologische Konstante $\Lambda = 0$, so wird $R(t)$

ein Maximum erreichen und danach wieder abnehmen: am Anfang ($t = 0$) gibt es einen "Big Bang", am Ende einen "Big Crunch". Ist jedoch $\Lambda > \Lambda_c > 0$, so expandiert das Weltall immer weiter, am Ende sogar mit Beschleunigung. Das sind die „Friedmann-Lemaître-Modelle“. Nimmt Λ mit $\Lambda_c > 0$ einen bestimmten Wert an, ergibt sich das Einsteinsche statische Universum.†

- Die oft gehörte Aussage, ein geschlossenes Universum werde schließlich wieder kontrahieren, ist nicht gültig, wenn die kosmologische Konstante größer als ein bestimmter kritischer Wert ist. Das Volumen des Weltalls ist dann zwar zu jeder Zeit t endlich, wächst aber mit $t \to \infty$ über alle Grenzen.

- Das Volumen eines geschlossenen Universums wird beim Urknall ($t = 0$) zu Null, da dann auch $R(0) = 0$ ist. Man kann also sagen, daß das ganze Universum dann in einem Punkt konzentriert war. Für ein euklidisches oder ein negativ gekrümmtes Universum ist diese Aussage aber nicht richtig, wie im Haupttext dargestellt wurde.

  Dieser Punkt liegt aber nicht *innerhalb* des Universums, wie im Teil A.2 gezeigt wird.

- Es gibt keinerlei Evidenz dafür, daß das Weltall geschlossen ist. Die Beobachtungen lassen derzeit auf ein euklidisches Universum schließen. Das Volumen eines solchen Universums ist und war immer unendlich, *auch zum Zeitpunkt des Urknalles*. Denkbar ist aber, daß das Universum vor der Inflationsphase (wenn es sie denn gegeben hat) positiv gekrümmt, also geschlossen, war. Dann hätte der Urknall in einem geschlossenen Universum stattgefunden, dessen Volumen dabei Null gewesen wäre.

A.2 Einbettung des geschlossenen Universums

A.2.1 Das Universum als die Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel

Wir betrachten einen vierdimensionalen, *euklidischen*, Raum $\mathbb{R}^4$, also—ausdrücklich!—keine *Raumzeit*, denn diese wäre nicht euklidisch, sondern hätte eine Minkowski-Signatur. Als Koordinaten nehmen wir $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ und $x^4 = u$. Ausdrücklich verwenden wir nicht t, sondern u, und auch nicht x^0, sondern x^4, um jede Verwechselung mit der vierdimensionalen Raum*zeit*, die in den Koordinaten $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ beschrieben wird, auszuschließen.

Jetzt werde die *dreidimensionale* (!!) „Oberfläche“ einer *vierdimensionalen* (!!) „Kugel“ betrachtet. Deren Radius setzen wir gleich R. Für die Koordinaten aller Punkte auf dieser „Kugeloberfläche“ gilt der Zusammenhang

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2 \,, \tag{4}$$

†Siehe z. B. bei T. Fließbach: *Allgemeine Relativitätstheorie*, 6. Aufl., Springer Spektrum, 2012, Kap. 53.

so daß nur drei der vier Koordinaten unabhängig sind. Wir wollen x, y und z nehmen und u als von diesen abhängig betrachten:

$$u^2 = u^2(x,\, y,\, z) = R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \equiv R^2 - \mathbf{r}^2 \ , \tag{5}$$

dabei fassen wir die drei unabhängigen Koordinaten zu dem Ortsvektor $\mathbf{r} := (x,\, y,\, z)^T$ zusammen.

- Hier handeln wir uns, wegen des Quadrates von u, eine Zweideutigkeit ein: zu jedem Koordinatentripel $(x,\, y,\, z)$ gehören genau zwei Punkte, die sich im Vorzeichen von u unterscheiden. x, y und z durchlaufen also jeweils *zweimal* alle erlaubten Werte, die durch $R^2 - \mathbf{r}^2 > 0$ gegeben sind. In drei Dimensionen entspräche dies der Beschreibung einmal der Nord- und dann der Südhalbkugel.

Um zu der Metrik der dreidimensionalen „Kugeloberfläche" zu gelangen, drükken wir das Linienelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 \tag{6}$$

allein durch dx, dy und dz aus. Dann ist es von der gesuchten Form

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad .$$

Aus der Gleichung (4) gewinnt man einen Zusammenhang zwischen den Differentialen:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz + u\,du = 0 \ ,$$

oder

$$u\,du = -(x\,dx + y\,dy + z\,dz) \equiv -\mathbf{r}\,d\mathbf{r} \ ,$$

mit dem Vektor $d\mathbf{r} := (dx,\, dy,\, dz)^T$, und weiter:

$$du^2 = \frac{(\mathbf{r}\,d\mathbf{r})^2}{u^2} \overset{(5)}{=} \frac{(\mathbf{r}\,d\mathbf{r})^2}{R^2 - \mathbf{r}^2} \quad .$$

Hiermit wird aus der Gleichung (6) ein Ausdruck der gesuchten Form:—

$$ds^2 = (d\mathbf{r})^2 + \frac{(\mathbf{r}\,d\mathbf{r})^2}{R^2 - \mathbf{r}^2} \quad . \tag{7}$$

Auf der rechten Seite stehen nur noch die drei unabhängigen Koordinaten x, y und z für die „Kugeloberfläche".

Bleiben wir bei cartesischen Koordinaten, werden wir wegen des Quadrates

$$(\mathbf{r}\,d\mathbf{r})^2 = (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2$$

gemischte Glieder der Form $x\,y\,dx\,dy$ erhalten: der metrische Tensor wird also in diesen Koordinaten nicht diagonal sein. Aus diesem Grunde wechseln wir zu Kugelkoordinaten r, ϑ, φ:—

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad .$$

Dann ist

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} dr + r \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta + r \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \quad .$$

Man rechnet sofort nach:

$$\mathbf{r}^2 = r^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = r\cdot dr \quad . \tag{8}$$

Nun fehlt noch[‡]

$$\begin{aligned} (d\mathbf{r})^2 &= (\sin\vartheta\cos\varphi\,dr + r\cos\vartheta\cos\varphi\,d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi\,d\varphi)^2 + \\ &\quad + (\sin\vartheta\sin\varphi\,dr + r\cos\vartheta\sin\varphi\,d\vartheta + r\sin\vartheta\cos\varphi\,d\varphi)^2 + \\ &\quad + (\cos\vartheta\,dr - r\sin\vartheta\,d\vartheta)^2 \\ &= dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Mit den Gleichungen (8) und (9) kann das Linienelement (Gl. [7]) neu angeschrieben werden:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + \frac{r^2\,dr^2}{R^2 - r^2}$$

oder

$$ds^2 = \frac{R^2\,dr^2}{R^2 - r^2} + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 \quad . \tag{10}$$

Für die Winkelkoordinaten gilt $\vartheta \in [0,\,\pi]$, $\varphi \in [0,\,2\pi[$. Da die vierdimensionale „Kugel“, nach Voraussetzung, den Radius R hat, ist $r \in [0,\,R[$. Dieser Bereich wird *zweimal* durchlaufen, um alle Punkte der „Kugeloberfläche“ zu erreichen: die der „Nord-“ und die der „Südhalbkugel“.[§]

Die Koordinatensingularität für $r \to R$ kann man beseitigen, indem man setzt

$$r =: R\sin\chi \ , \tag{11}$$

$\chi \in [0,\,\pi[$. Dann folgt

$$dr = R\cos\chi\,d\chi \quad \text{und} \quad R^2 - r^2 = R^2\cos^2\chi \quad ,$$

[‡] Wir wünschen dem geneigten Leser viel Spaß beim Nachrechnen!

[§] Siehe die Bemerkung unter der Gleichung (5).

also

$$\frac{R^2\,dr^2}{R^2 - r^2} = R^2\,d\chi^2 \quad . \tag{12}$$

Mit den Gleichungen (11) und (12) erhält das Linienelement der Gleichung (10) genau die Form des räumlichen Teiles der ROBERTSON-WALKER-Metrik für $f(\chi) = \sin\chi$ (Gleichungen [2] und [3]):—

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2\,d\chi^2 + R^2\sin^2\chi\,d\vartheta^2 + R^2\sin^2\chi\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 \\ &= R^2\left\{d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2\right)\right\} \;. \end{aligned}$$

Der räumliche Teil eines geschlossenen Universums besitzt also als die gleiche innere Geometrie wie die dreidimensionale „Oberfläche“ einer in einen vierdimensionalen Raum eingebettete vierdimensionale „Kugel“. *Dieser vierdimensionale Raum ist nicht die Raumzeit, sondern ein hypothetischer, e u k l i d i s c h e r Raum* $\mathbb{R}^4$. Der Skalenfaktor $R(t)$ in der ROBERTSON-WALKER-Metrik entspricht dem Radius R dieser vierdimensionalen „Kugel“.

A.2.2 Noch einmal: der Urknall in einer geschlossenen Welt

Läßt man in den üblichen Weltmodellen die Zeit gegen Null gehen, dann geht der Skalenfaktor $R(t)$ ebenfalls gegen Null. Geometrisch gesehen, zieht sich dann das gesamte Universum auf einen Punkt zusammen, nämlich auf den Mittelpunkt der vierdimensionalen „Kugel“, deren „Oberfläche“ das Weltall darstellt. Die Aussage, beim Urknall sei das gesamte Universum in einem Punkt vereinigt gewesen, ist daher richtig,—allerdings nur für ein Universum mit positiver Krümmung. Ein euklidisches und ein negativ gekrümmtes Weltall besitzen zu allen Zeiten jeweils ein unendliches Volumen.

Der Punkt, auf den sich ein geschlossenes Weltall zusammenzieht, liegt aber nicht im Weltall selbst. Er ist der Mittelpunkt einer vierdimensionalen „Kugel“ und daher vom Weltall aus, der „*Oberfläche*“ dieser „Kugel“, nicht zugänglich. Wenn wir, wie im Haupttext, den Urknall als den Grenzwert für $t \to 0$ ansehen, als den Zustand also, bei dem Druck, Dichte und Temperatur gegen unendlich gehen, dann ist der Urknall auch in einem geschlossenen Universum ein globales Ereignis: er stellt sich überall, im gesamten Universum, gleichermaßen ein.

Man stelle sich vor, die Erde zöge sich auf ihren Mittelpunkt zusammen. Dann würde es auf der Oberfläche immer enger, aber man könnte dort keinen Punkt ausmachen, auf den sich alles zusammenzieht, da der Mittelpunkt eben nicht Teil der Oberfläche ist. In diesem Sinne ist der Punkt, aus dem das Weltall beim Urknall hervorging, nicht im Weltall selbst gelegen.

Gegenwärtig deuten die Beobachtungen jedoch darauf hin, daß das Weltall euklidisch, also offen, und damit unendlich groß ist—und immer schon war. Es kann allerdings sein, daß dies nur vorgetäuscht wird, weil es eine inflationäre Phase der

Ausdehnung im frühen Universum gab, durch die die Krümmung des Weltalles nahezu zu Null gemacht wurde, während es zu dem Zeitpunkt des Urknalles selbst positiv gekrümmt war.